

Simulação computacional aplicada à modulação de transmissão de sinal e processamento digital de imagem

Leonardo Guimarães Aleixo¹

¹Engenheiro de telecomunicações

leotelecom@bol.com.br

Abstract. *Development of a mathematical model to detect the probability of errors in signal transmissions in telecommunications, applying methods by approximate analytical integration together with computational numerical response values. Comparing the mathematical curve of the proposed equation to the results returned by the Python statistical cumulative distribution function **norm.cdf**, presenting graphic curves in a deterministic interval, with return of approximate numerical values to those of the table $Q(x)$ used in telecommunications engineering. In the end, the developed mathematical model is applied as a new signal filtering function and digital image processing.*

Resumo. *Estudo desenvolvido de modelo matemático para detectar probabilidade de erros na transmissão de sinais em telecomunicações, com aplicação de métodos por integração analítica aproximada em conjunto a valores de resposta numérica computacional. A curva matemática da equação proposta é comparada aos resultados retornados pela função Python de distribuição cumulativa estatística **norm.cdf**, com apresentação de curvas gráficas dentro de intervalo determinístico, e retornando valores numéricos aproximados aos da tabela $Q(x)$ utilizada em engenharia de telecomunicações. Ao final, o modelo matemático desenvolvido é aplicado como nova função de filtragem de sinal no processamento de uma imagem digital.*

1. Introdução

O estudo em pesquisa computacional está abrangendo quase todos os ramos de telecomunicações, o mais importante na atualidade está em analisar diversos tipos de sinais transmitidos, tanto em rede conectadas quanto em simples comunicação por dispositivos eletrônicos móveis. A modulação de ondas portadora esta utilizando ampla faixa de espectro em frequências, onde esta mesma faixa pode ser subdividida em canais utilizados para transmitir imagens, voz, dados, e até sinais cifrados ou códigos de ativação para dispositivos remotos. Para suportar a demanda de comunicação digital, equipamentos eletrônicos estão utilizando cada vez mais memória, principalmente em detecção de erros com métodos de computação discreta na análise de valores, com maior processamento de sinais recebidos quanto de sinais de resposta em transmissão. Este trabalho apresenta uma função determinística, como alternativa de estudo na análise de probabilidade de erros, optando por minimizar o uso de métodos numéricos computacionais que elevem o uso de memória no microprocessador, o que acarretaria um número maior de equipamentos eletroeletrônicos em transmissão. Sendo assim, o modelo desenvolvido

busca simplificar a programação de códigos digitais, podendo exigir menor número de equipamento, e liberação de memória para a transmissão e programação de microcontroladores. E visando também a otimização de um filtro digital, a função foi aplicada na filtragem de imagem digital com análise de possíveis alterações de padrão de composição de um sinal digital transmitido.

A engenharia de telecomunicações busca a redução de erros de transmissão causados por diversos fatores, buscando baixa probabilidade de perdas de dados através de modulação específica. Equipamentos de transmissão de sinais utilizam como base na detecção de erros, o método estatístico de Distribuição Normal, sob a forma de cálculo numérico, o que exige circuitos eletrônicos específicos para o processamento de dados de probabilidade. O modelo matemático desenvolvido neste trabalho aproxima ao máximo os resultados obtidos, sendo os resultados comparados com tabela padrão e numérica $Q(x)$, bastante utilizada em estudos aplicados a modulação de sinais digitais. No entanto como visto, a seguir, apenas se tentou modelar equação aproximada e prática para telecomunicações, sem buscar resposta definitiva em matemática pura para resolução de equação clássica e histórica.

2. Telecomunicações e modulação de sinais

A pesquisa em telecomunicações busca aperfeiçoar a transmissão de sinais analógicos e digitais, na tentativa de suprimir ruídos acrescidos ao sinal original. Para isto é estudada a probabilidade de perda de sinal com aplicação aos modelos matemáticos de modulação de onda portadora, como forma em prever erros de transmissão com o mínimo de perdas possíveis do sinal original. Conforme [Lathi 2012] uma das formas de calcular a probabilidade de transmissão de um canal é a função Densidade de Probabilidade (PDF - Probability Density Function) da variável aleatória V_{A_x} equação (2) e adaptada de [Haykin and Moher 2011], onde N_0 representa a *potência de ruído média por unidade de largura de banda medida, na etapa de entrada do receptor* e T_b é a duração de *bit* visto na equação (3). O engenheiro utiliza a valores de resposta da Distribuição Normal (CDF - Cumulative Distribution Function) $N(\mu, \sigma^2)$ equação (4) adaptada para a função $Q(x)$ no estudo em teoria das telecomunicações, determinando da área sob a cauda de curva probabilística, e conforme [Gomes 2013], é amplamente utilizada no estudo de transmissão de sinais em rádio enlaces e previsão da probabilidade de informação emitida por um canal transmissor.

3. Metas a serem cumpridas

Em telecomunicações se utiliza valores tabelados para obtenção de modulação apropriada e com menor probabilidade de erro em transmissão, para valores binários ou impulsos de sinais. Logo, é importante desenvolver, como alternativa, um modelo matemático determinístico aproximado, que produza valores numéricos satisfatórios e que simplifique algoritmo aplicado em sistemas embarcados [Garcia 2014] e transmissão de sinais. Também foi aplicada a mesma equação determinística criada, para modificar uma imagem digital e verificar a alteração nos padrões de composição visual, com fins em produzir algoritmo de código computacional para ser incorporado em câmeras digitais. Em [Grigoletti et al. 2007] temos tentativa em aplicar métodos matemáticos científicos na comparação de valores numéricos, em [Tortellil et al. 2018] vemos ensaio de aplicação e funcionalidade de algumas funções escritas em Python para estudo estatístico de dados.

Para [Benitez et al. 2011] a probabilidade de erro *bit* pode ser avaliada por expressão analítica em sistemas ($M - \mathbf{PAM}$) em função da relação sinal ruído. Em [Pinto 2018] seu estudo exemplifica a utilização da função $\mathbf{Q}(x)$ equação (5) para modulação ($M - \mathbf{QAM}$) ou Quadrature Amplitude Modulation, e visto na equação (1) para obter a probabilidade de erro *bit* em (6). Conforme descrito acima segue as referências das equações que serviram como base de estudo e modelagem.

$$P_b \approx \frac{4}{b}(1 - 2^{\frac{b}{2}})\mathbf{Q}\left(\sqrt{\frac{3bSNR_{bits}}{2^b - 1}}\right) \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (2)$$

Dado que o símbolo 0 foi enviado, temos a equação (3)

$$f_x(x | 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi\frac{N_0}{T_b}}}e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{\frac{N_0}{T_b}}\right)} \quad (3)$$

$$\mathbf{N}(\mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dx = 1 \quad (4)$$

$$\mathbf{Q}(x) \simeq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{\left(\frac{-x^2}{2}\right)} \text{ para } x \gg 1 \quad (5)$$

$$P_b \approx \frac{4}{b}(1 - 2^{\frac{b}{2}})\mathbf{Q}(x) \quad (6)$$

4. Estudo de caso

4.1. Probabilidade e cálculo

Com tentativas de integração aproximada, combinadas a métodos numéricos e ao conceito de probabilidade chegou-se a uma equação modelada e simplificada, utilizando técnicas provindas do estudo de cálculo aplicado em cursos de graduação. Vemos aqui conceitos de referência como base de estudo e análise, onde conforme [Montgomery 2013] o modelo bastante utilizado para distribuição de uma variável aleatória é a distribuição normal, em que a variável aleatória que for igual ao resultado médio das réplicas de um experimento aleatório à medida que o número de réplicas aumente, tende a ter uma distribuição normal. De Moivre¹ demonstrou esse resultado como o teorema central do limite, Teorema 4.1, e posteriormente Gauss² apresentou a distribuição normal gaussiana. O valor de média $E(X) = \mu$ determina o centro da função de densidade de probabilidade e o valor de variância $V(X) = \sigma^2$ determina a largura, para $-\infty < x < \infty$,

¹Abraham de Moivre, foi um matemático francês.

²Johann Carl Friedrich Gauss, foi um matemático, astrônomo e físico alemão.

$-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$, e a notação $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ para a distribuição normal equação (4).

Teorema 4.1 (Central do Limite). *Se X_1, X_2, \dots, X_n for uma amostra aleatória de tamanho n , retirada de uma população (finita ou infinita), com média μ e variância finita σ^2 , e se \bar{X} for a média da amostra, então a forma limite da distribuição de $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ quando $n \rightarrow \infty$, é a distribuição normal padrão.*

4.2. Método de Leibniz

Em matemática, a regra do produto, também designada por “lei de Leibniz”³, é uma regra que permite a diferenciação de produtos de funções diferenciáveis. Esta regra diz que a derivada de um produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função mais a segunda função vezes a derivada da primeira função

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

A técnica de integração por partes é uma consequência da regra do produto para derivadas e estabelece

$$\int u(x)dv = u(x)v(x) - \int v(x)du$$

4.3. Análise e estimativa de modelo determinístico

Por tentativas de modelagem e baseada no conceito de integral indefinida para funções contínuas em todo o intervalo de integração, chegou-se a equação aplicada a uso em telecomunicações e tendo como base a *Distribuição Normal*. Logo, como alternativa ao uso da função $\mathcal{Q}(x)$ temos a equação $\mathbf{M}(x, \mu, \sigma)$ (7). A matemática neste trabalho limitou-se na criação e aplicação prática de função auxiliar para projeto de modulação, não buscando prova de solução analítica definitiva de modelo clássico utilizado em probabilidade. A equação (9) é apresentada como finalidade deste trabalho em contribuir para a engenharia e mundo acadêmico, com mais essa equação e trabalho em cálculo.

$$\mathbf{M}(x, \mu, \sigma) = \left[\frac{x^2 \mathbf{e}^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma} + \mu\right)}}{2\sigma} \right] \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \mathbf{e}^{\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (7)$$

Para a média $\mu = 0$ e variância $\sigma = 1$, temos a equação (8).

$$\mathbf{M}(x, 0, 1) = \frac{x^2 \mathbf{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} \quad (8)$$

Derivando equação (8) e igualando a zero, temos,

$$x \cdot \mathbf{e}^{-\frac{x^2}{2}} \cdot [2 - x^2] = 0,$$

³Gottfried Wilhelm Leibniz, foi um proeminente polímata e filósofo alemão.

$\sqrt{2}$ que satisfaz a derivada faz a equação (8) ser deslocada $\Phi = \sqrt{2}$ vezes até o eixo vertical de origem ao plano cartesiano, tendo como valor de resposta 0.146762663174 quando $x = 0$. Normalizando a equação (8) para equação (9) multiplicando pelo valor numérico $\mathbf{F} \rightarrow \frac{0,5}{0,146762663174} = 3,40686104481$, para $\mathbf{F} \in R$.

$$\mathbf{M}(x + \Phi, 0, 1) = \mathbf{F} \cdot \left[\frac{(x + \Phi)^2 e^{-\frac{(x+\Phi)^2}{2}}}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} \right] \quad (9)$$

Substituindo (9) em (6) onde $Q(x) = \mathbf{M}(x + \Phi, 0, 1)$ obtemos (10) que determina probabilidade de erro *bit* através dos valores numéricos de resposta a equação determinística modelada \mathbf{M} , para $x = \sqrt{\frac{3bSNR_{bits}}{2^b-1}}$ visto em (1).

$$P_b \approx \frac{4}{b}(1 - 2^{\frac{b}{2}})\mathbf{M}(x + \Phi, 0, 1) \quad (10)$$

4.4. Probabilidade de erros em modulação com análise de curvatura da função

Como demonstração de aplicação do modelo desenvolvido temos o exemplo da modulação em transmissão de sinal que utiliza a tabela $Q(x)$, para obter resposta de probabilidade de erro *bit* P_e visto na equação (12). Logo temos a PSK coerente-Phase Shift Keying ou modulação por chaveamento de fase visto na equação (11), com substituição de valores tabelados por respostas numéricas retornadas pela equação (9). Sendo a função $M(X_{PSK} + \Phi, 0, 1)$ determinística e de fácil incorporação em linguagem computacional, como alternativa na substituição aos métodos numéricos de processamento digital.

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) | Q(X_{PSK}) \mapsto M(X_{PSK} + \Phi, 0, 1) \quad (11)$$

$$P_{e,PSK} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right), \text{ para } X = \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \quad (12)$$

Ajustada e normalizada, a equação (9) retornou dados numéricos aproximados aos resultados da Função de distribuição cumulativa em Python `norm.cdf`⁴ subtraída do valor 1, e com aproximação aos valores tabelados da função $Q(x)$. A Figura 1 demonstra quatro ensaios de comparação de curvas e resposta gráfica.

⁴<https://docs.scipy.org/doc/scipy-1.2.1/reference/tutorial/stats.html>

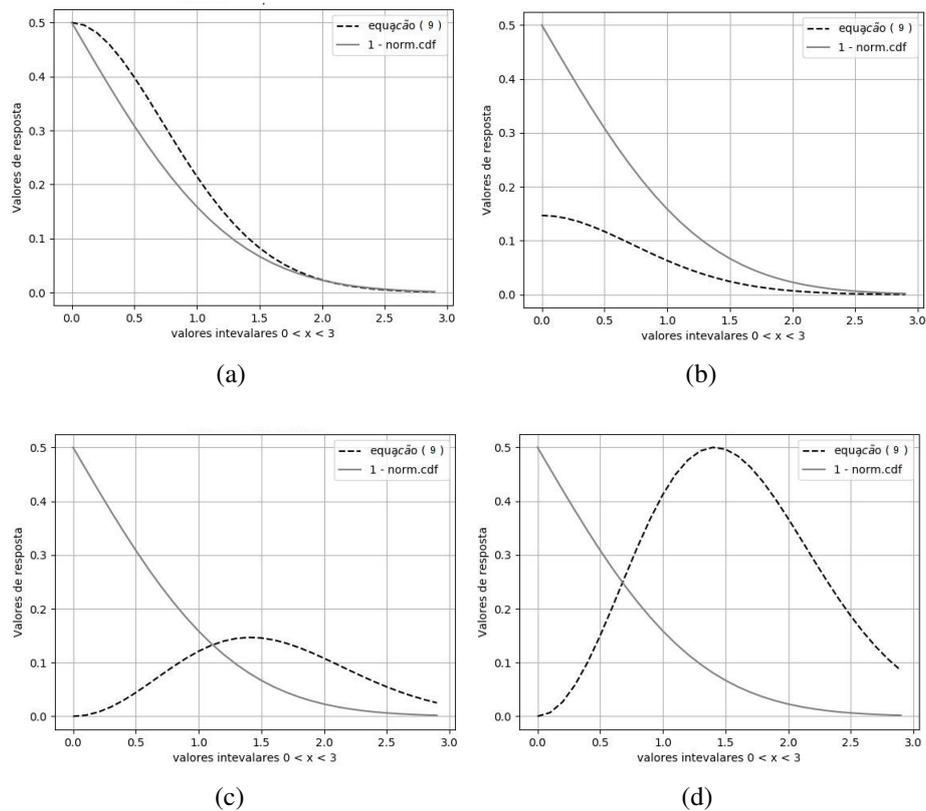


Figura 1. Em (a) temos a equação (9) completa, em (b) o valor 1 (hum) substituiu 3.40686104481, em (c) a equação (9) não foi deslocada $\Phi = \sqrt{2}$ e foi multiplicada por 1(hum), em (d) a equação (9) apenas não foi deslocada, e as amostras da variável x estão restritas ao intervalo $[0, 3]$ onde o comportamento das curvas comparadas tem maior proximidade.

5. Modelo aplicado ao processamento de imagem

É importante também poder incorporar o modelo desenvolvido em nova função de filtragem digital, como forma de análise de alterações nos padrões da matriz de composição de imagem, pois as mesmas são amplamente transmitidas em redes de transmissão móvel ou de TV. Logo temos a equação (9) transcrita para código *Python*, executando o processamento da matriz de pontos de imagem digital em formato *JPG*, retornando novos dados de composição de imagens, obtendo imagens novas para cada um dos quatros ajustes de valores do modelo da equação estimada. Conforme [Jesus and Jr 2015] vemos aplicação de filtro Gaussiano no processamento digital de imagens, o que para este trabalho reforça a aplicação do modelo matemático desenvolvido e proposto, com intuito em gerar amostras visuais de imagens, como forma de melhor visualizar as respostas de mudança de sinal numérico que compõem matriz de dados. Vemos equação (9) aplicada na imagem original 2(a), com processamento digital e utilizando linguagem de programação *Python* através do pacote *NumPy*⁵. A Figura 2 demonstra imagem original e três imagens modificadas.

⁵<https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/>

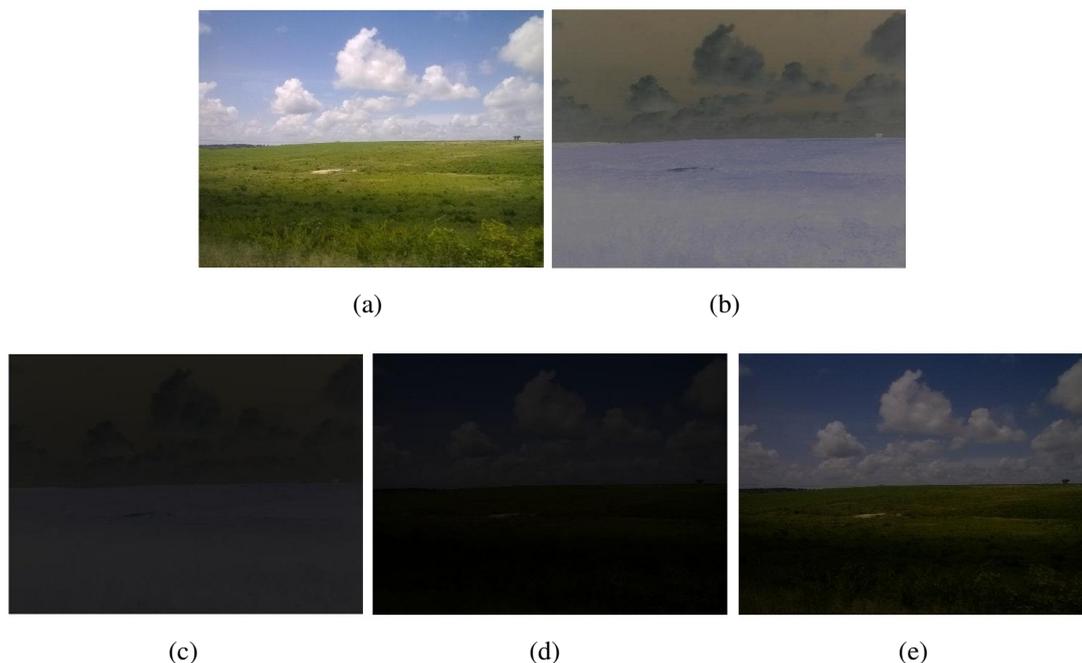


Figura 2. Em (a) temos a imagem original, em (b) é aplicado equação (9) no processamento da imagem original, em (c) somente o valor 1 (hum) substituiu 3.40686104481, em (d) a equação (9) não foi deslocada $\Phi = 0$ e $F = 1$, em (e) a equação (9) apenas não foi deslocada.

6. Resultado e aplicação

Este estudo tenta aproximar ao máximo as respostas numéricas do modelo calculado aos da clássica Tabela $Q(x)$, e conforme visto na secção (4.4), é muito importante poder obter precisão probabilística associada aos valores de x encontrados na Tabela. Transmitir dados em telecomunicações requer sincronização entre o transmissor e o receptor, com capacidade em detectar o limiar de faixa de erros para uma modulação de transmissão, onde é vital economizar equipamentos e memória de armazenamento eletrônico, podendo direcionar recursos em otimização de dados. É possível ver resultado de curva de resposta numérica Figura 1(a) através da equação (9) com resultados de boa aproximação aos valores tabelados de $Q(x)$ e vistos em [Lathi 2012] página 387, comparados aos valores numéricos de retorno da **(1 - norm.cdf)**. Prova-se a simplicidade da equação determinística desenvolvida, na incorporação em códigos computacionais programáveis e reduzindo a complexidade no uso de métodos numéricos.

Como apresentado, a aplicação do processamento de imagem não analisou comportamento das propriedades de cores e espectro de sinal, no entanto, ao aplicar a (9) e mudar os dados numéricos da matriz de dados da Figura 2(a), houve retorno de alterações visuais nas características originais da imagem, onde a equação pode ser programada em sistema embarcado de câmeras e filmadoras digitais, com redução do tempo de operação de microcontroladores. E conforme visto, estudo da matemática aplicada para finalidade computacional pode trazer benefícios na economia de componentes eletrônicos para fins de transmissão de sinais, o que é visto na equação determinística desenvolvida, pois a mesma não exige cálculo numérico de aproximação de valores, podendo reduzir o processamento em memória e operação digital, e podendo ser incorporada a conjunto de códigos programáveis em computação digital eletrônica.

7. Conclusão

O trabalho apresenta estudo de método que elabora equação simples e aplicada na detecção de erros estatísticos na transmissão de sinais, podendo ser aplicada na modulação de sinais em telecomunicação quanto utilizada como filtro digital na alteração de informação, como teste em imagem gráfica para a análise de distorções nos seus padrões visuais. Com base de estudo partindo do modelo da Distribuição Normal, a equação segue com resultados e demonstração de respostas numéricas satisfatórias e aproximadas a dados tabelados em engenharia que determinam a probabilidade de erro de uma modulação de sinal em telecomunicações e utilizando métodos dedutivos clássicos e comuns ao cálculo. Os resultados gráficos provam aproximação de curva determinística dentro do limite de intervalo de domínio proposto em engenharia de transmissão, com ajustes de deslocamento e de normalização. Logo se demonstra utilização da mesma equação para aplicar um modelo de filtro digital novo e alternativo ao processamento de sinais, como prova de modificações de matriz de dados da imagem original utilizada, apresentando com resposta visual em três diferentes imagens processadas.

Referências

- Benitez, E., Moya, D., Quelal, G., and de Almeida, C. (2011). Avaliação dos efeitos da interferência de co-canal e da diversidade de antenas na probabilidade de erro de bit para modulações m-qam em canais com desvanecimento rayleigh. In *Brazilian Telecommunication Symposium*.
- Garcia, G. A. (2014). *Sistemas Eletrônicos Dispositivos e aplicações*. Érica 1.Ed., Brazil.
- Gomes, G. G. R. (2013). *Sistemas de Rádio Enlaces Digitais*. Érica 1.Ed., Brazil.
- Grigoletti, P. S., Dimuro, G. P., and Barboza, L. V. (2007). Módulo python para matemática intervalar. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, 8(1):73–82.
- Haykin, S. and Moher, M. (2011). *Sistemas de Comunicação-5*. Bookman Editora.
- Jesus, E. O. and Jr, R. C. (2015). A utilização de filtros gaussianos na análise de imagens digitais. SBMAC.
- Lathi, B. (2012). *Sistemas de Comunicações Analógicos e Digitais Modernos*. LTC 4.Ed., Brazil.
- Montgomery, D. C. (2013). *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*. LTC 5.Ed., Brazil.
- Pinto, T. M. S. (2018). Avaliação sistêmica da modulação óptica m-qam gerada por sinais elétricos binários e multiníveis. Master's thesis.
- Tortellil, L. M., Maraschin Jr, D. A., Finger, A. F., and Loreto, A. B. (2018). Biblioteca estatística descritiva intervalar utilizando python. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 6(1).